На правах рукописи

Хубиев Казбек Узеирович

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук
Научно-исследовательском институте прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН (НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор,
Нахушев Адам Маремович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор,
Сабитов Камиль Басирович

кандидат физико-математических наук,
доцент,
Жура Николай Андреевич

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится 14 апреля 2009 г. в 15 ч 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном университете по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, корп. 1 БелГУ, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан марта 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Прядиев В.Л.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение уравнений смешанного типа является одним из важнейших направлений в теории уравнений с частными производными. Необходимость исследования краевых задач для уравнений смешанного типа продиктована многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в прогнозировании уровня грунтовых вод, в математической биологии и других областях. Также хорошо известно, что многие весьма важные задачи математической физики и биологии, в особенности, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, оптимального управления агроэкосистемой, приводят к краевым задачам для линейных нагруженных уравнений с частными производными. Этим обуславливается актуальность исследований краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа.

В 1902 году С.А. Чаплыгин в своей диссертации "О газовых струях", исследуя движение газа от дозвуковой к сверхзвуковой скорости получил уравнение смешанного типа, которое в дальнейшем было названо уравнением Чаплыгина.

Систематическая разработка теории краевых задач для уравнений смешанного типа началась в двадцатых годах прошлого столетия с основополагающих результатов Ф. Трикоми и С. Геллерстедта.

Началом нового этапа в развитии теории уравнений смешанного типа явились работы Ф.И. Франкля, М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе.

Фундаментальные результаты в теории уравнений смешанного типа получены в работах Алдашева С.А., Бабенко К.И., Гвазавы Д.К., Джураева Т.Д., Елеева В.А., Зарубина А.Н., Золиной Л.А., Кальменова Т.Ш., Каратопраклиева Г.Д., Моисеева Е.И., Нахушева А.М., Пулькина С.П., Пулькиной Л.С., Репина О.А., Сабитова К.Б., Салахитдинова М.С., Смирнова М.М., Солдатова А.П., Стручиной Г.М. и других авторов.

В 1969 году А.М. Нахушев предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием *краевых задач со смещением*, которые, как оказалось, тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями.

Исторически сложилось так, что первые работы по нагруженным уравнениям были посвящены нагруженным интегральным уравнениям. Термин "нагруженное уравнение" впервые появился в работах Кнезера применительно к интегральным уравнениям. Принятое сейчас в научной литературе общее определение нагруженных уравнений было дано А.М. Нахушевым в 1976 г. Именно результаты А.М. Нахушева и его учеников дали начало интенсивному изучению краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов исследованы в работах Нахушева А.М., Аттаева А.Х., Бородина А.В., Елеева В.А., Казиева В.М., и многих др.

Обширная библиография по нагруженным уравнениям и исследованию эллиптических, параболических и гиперболических уравнений приведена в монографии М.Т. Дженалиева "К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений".

Цель работы. Основной целью работы является исследование вопросов однозначной разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для линейных нагруженных дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа второго порядка.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием метода интеграла энергии, методов интегральных уравнений, метода малого параметра.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в доказательстве теорем существования и единственности решения аналога задачи Трикоми, задачи Геллерстедта, задачи со смещением, нелокальной краевой задачи типа задачи Бицадзе-Самарского и нелокальной краевой задачи с интегральным условием в гиперболической части для нагруженных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Теоремы существования и единственности решения задачи Трикоми для нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа.

2. Теоремы существования и единственности решения задачи Геллерстедта для нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа.

3. Теоремы существования и единственности решения нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа.

Практическая и теоретическая ценность. Работа является теоретической. Практическая ценность обусловлена прикладной значимостью уравнений смешанного типа и нелокальных краевых задач в математическом моделировании, газовой динамике и других областях.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международном Российско-Казахском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (Нальчик–Эльбрус, 2004 г.), на Международном Российско-Азербайджанском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и проблемы современного анализа и информатики" (Нальчик–Эльбрус, 2008 г.), на III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" (Нальчик, 2006 г.), на III Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования"(Воронеж, 2009 г.), на II–VI школах молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики" (Нальчик – Эльбрус, 2004–2008 г.), на семинаре по современному анализу, информатике и физике НИИ ПМА КБНЦ РАН (руководитель – Нахушев А.М.), на научно-исследовательском семинаре по дифференциальным уравнениям БелГУ (руководитель – Солдатов А.П., февраль 2009 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1]-[21]. Из них [9] и [19] опубликованы в изданиях, включенных в список изданий, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих 9 параграфов, заключения и списка литературы, содержащего 98 наименование и изложена на 97 страницах.

Основное содержание работы

Во **введении** дается краткий обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, показана актуальность темы исследований, излагается краткое содержание основных результатов диссертации.

Первая глава посвящена решению аналога задачи Трикоми.

В § 1.1 рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1(x,y)u(x,0), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2(x+jy)u(x+jy,0), & y < 0, \end{cases} \qquad j = \pm 1 \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC:\ x+y = 0$, $BC:\ x-y = 1$ при $y < 0$, $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x+jy)$ – заданные функции. Через Ω^+ и Ω^- обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно а через $J-$ интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$ (см. рис. 1).

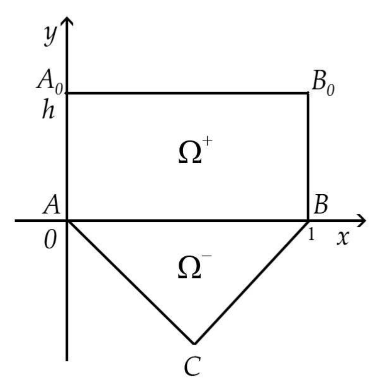

Рис. 1

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \backslash J)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, кроме того, $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $0 < x < 1$.

Здесь и далее через $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$, $\theta_1(x) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right)$ обозначены аффиксы точек пересечения характеристик волнового уравнения, выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача T. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, \quad u\,(1,y) = \varphi_2\,(y)\,, \quad 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u[\theta_0(x)] = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$.
Доказана

Теорема 1.1. *Если $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C[0,h]$, $\psi(x) \in C^1[0,1] \cap C^2]0,1[$, функция $\lambda_1(x,y) \in C(\bar{\Omega}^+)$ и удовлетворяет условию Гельдера по x, а $\lambda_2(x) \in C[0,1] \cap C^1]0,1[$, и выполняются условия*

$$\begin{gathered} 2\lambda_1(x,0) - x\lambda_2(x) \le 0 \qquad \textit{при} \quad j = -1, \\ \lambda_1(x,0) \le 0, \qquad \lambda_2(x) \ge 0, \qquad \lambda_2'(x) \ge 0 \qquad \textit{при} \quad j = 1, \end{gathered} \tag{4}$$

то задача **T** *имеет, и притом единственное решение.*

Показано, что нарушение условия (4) теоремы может привести к неединственности решения задачи.

В § 1.2 рассматривается уравнение с нагрузкой общего вида

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + au_x + cu + [\mathbf{M}_1 u(t,0)](x,y) - f_1(x,y), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + [\mathbf{M}_2 u(t,0)](x,y) - f_2(x,y), & y < 0, \end{cases} \tag{5}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = r$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = r$ при $y < 0$. $\mathbf{M}_1 : C(\bar{J}) \to C(\bar{\Omega}^+)$, $\mathbf{M}_2 : C(\bar{J}) \to C(\bar{\Omega}^-)$ – заданные линейные ограниченные операторы, функции $f_1(x,y) \in C(\bar{\Omega}^+)$, $f_2(x,y) \in C(\bar{\Omega}^-)$, $a, c = const$.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{6}$$

$$u\,[\theta_0(x)] = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le r, \tag{7}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Для задачи (5)-(7) верна следующая

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h],\ \ \psi(x) \in C^1(\bar J) \cap C^2(J)$, $c \neq \frac{4\pi^2 n^2 + (a-1)^2 r^2}{4r^2},\ \ n = 0,1,2,...;\ \ f_1(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* $x,\ \ f_2(x,y) \in C(\bar\Omega^-) \cap C^1(\Omega^-),\ \ \mathbf{M}_1[C^1(J)] \subset C^1(\Omega^+),\ \ \mathbf{M}_2[C^1(J)] \subset C^1(\Omega^-)$. *Тогда задача* $(5)-(7)$ *является задачей фредгольмового типа. В частности, если выполняется неравенство* $\|\mathbf{M}_1\| + \frac{r}{4}\|\mathbf{M}_2\| < \frac{1}{\gamma r}$, *где* $\gamma = \frac{\mathrm{th}(\mu r/2)}{2\mu}$, $\mu = \sqrt{(a-1)^2 - 4c}$, *то задача* $(5)-(7)$ *имеет, и притом единственное, решение.*

В § 1.3 исследуется аналог задачи Трикоми для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u + d_1 u(x,0) - f_1(x,y), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u + d_2 u(x+y,0) - f_2(x,y), & y < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0,\ x = 1$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x + y = 0,\ \ BC: x - y = 1$ при $y < 0$ (см. рис. 1), $a_k = a_k(x,y)$, $b_k = b_k(x,y),\ \ c_k = c_k(x,y),\ \ d_k = d_k(x,y),\ \ f_k = f_k(x,y)\ (k = 1,2)-$ заданные непрерывные функции, причем $b_1(x,y) \le b_0 < 0$.

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (8), *удовлетворяющее краевым условиям* (2), (3).

Для задачи (8), (2), (3) доказана следующая

Теорема 1.3. *Если* $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h],\ \ \psi(x) \in C^1[0,1] \cap C^2]0,1[$, *а коэффициенты уравнения* (8) *таковы, что*

1) *в области* $\bar\Omega$

$$a_2^2 - b_2^2 + 2a_{2x} + 2a_{2y} + 2b_{2x} + 2b_{2y} - 4c_2 = \frac{4d_2}{\lambda(x,y)},$$

где $\lambda(x,y) = \gamma(x+y)\exp\left[-\frac{1}{4}\int\limits_0^{x-y}\left\{a_2\left(\frac{x+y+t}{2},\ \frac{x+y-t}{2}\right) + b_2\left(\frac{x+y+t}{2},\ \frac{x+y-t}{2}\right)\right\}dt\right]$, *причем* $\gamma(x) \neq 0$ *– произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция,* $\lambda(x,0) > -1;\qquad \mu(x) = \frac{1}{1+\lambda(x,0)}$,
$\frac{\mu''(x)}{\mu(x)} + a_1(x,0)\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - b_1(x,0)\left[\frac{1-\mu(x)}{\mu^2(x)}\mu'(x) + \lambda_y(x,0)\right] + c_1(x,0) + d_1(x,0) < 0;$

2) *в области* $\bar\Omega^+$ *функции* $a_1,\ c_1,\ d_1,\ f_1$ *непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера по* x, b_1 *непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера по* x *и по* y, *кроме того* $c_1 < 0$;

3) *в области* $\bar\Omega^-$ $a_2, b_2 \in C^2(\bar\Omega^-),\ \ c_2 \in C^1(\bar\Omega^-),\ \ d_2, f_2 \in C(\bar\Omega^-) \cap C^1(\Omega^-)$,

$$a_2 + b_2 \ge 0, \quad \gamma(x+y)d_2 \ge 0, \quad c_2 \ge 0;$$

то задача имеет, и притом единственное решение.

Здесь же в области Ω рассмотрено уравнение

$$u_{xx} - H(-y)u_{yy} + au_x + bu_y + cu + du(x,0) = f \tag{9}$$

где $a = a(x)$, $c = c(x)$, $d = d(x) \in C(\bar{I})$, функции $b = b(x,y) \le b_0 < 0$, $f = f(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $H(y)$ – функция Хевисайда.

Вопрос о разрешимости задачи (2), (3) для уравнения (9) редуцирован к вопросу о разрешимости следующей нелокальной краевой задачи.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $v(x,y)$ уравнения*

$$v_{xx} - H(-y)v_{yy} + av_x + bv_y + cv = f,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0,y) = \varphi_1(y), \quad v(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h,$$

$$v[\theta_0(x)] + \int\limits_0^1 K(x,\xi)v(\xi,0)d\xi = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x)$ – непрерывные функции, $K(x,\xi)-$ непрерывная на $[0,1]\times[0,1]$ функция, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Во **второй главе** рассматривается задача Геллерстедта.

В § 2.1 рассматривается уравнение с нагрузкой общего вида

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + au_x + cu + [\mathbf{M}_0 u(t,0)](x,y) - f_0(x,y), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + [\mathbf{M}_k u(t,0)](x,y) - f_k(x,y), \quad k = 1,2, & y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

в области $\Omega = \left(\bigcup\limits_{k=0}^{2} \Omega_k\right) \cup J_1 \cup J_2$, где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = r$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, Ω_1 – область, ограниченная отрезком AE оси x и характеристиками уравнения (10) $AC_1 : x+y = 0$, $EC_1 : x-y = r_1$ при $y < 0$, Ω_2 – область, ограниченная отрезком EB оси x и характеристиками $EC_2 : x+y = r_1$, $BC_2 : x-y = r$ (см. рис. 2), J_0 – интервал $0 < x < r$, J_1 – интервал $0 < x < r_1$, J_2 – интервал $r_1 < x < r$.

Здесь $\mathbf{M}_k : C(\bar{J}_k) \to C(\bar{\Omega}_k)$, ($k = 0,1,2$) – заданные линейные ограниченные операторы, функции $f_k(x,y) \in C(\bar{\Omega}_k)$, a, $c - const$.

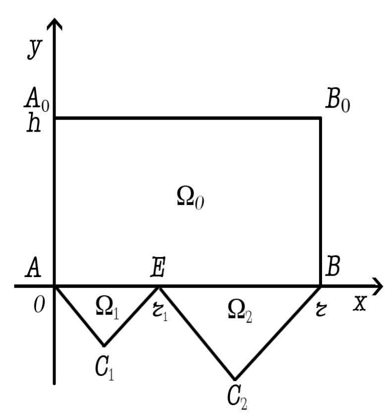

Рис. 2.

Регулярным решением уравнения (10) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega\backslash[J_1\cup J_2])$, удовлетворяющую уравнению (10) в области $\bigcup\limits_{k=0}^{2}\Omega_k$.

Задача $\mathbf{\Gamma_1}$. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (10), удовлетворяющее краевым условиям (6) и*

$$u_{|_{EC_1}}=\psi_1(x), \quad 0\le x\le r_1, \tag{11}$$

$$u_{|_{EC_2}}=\psi_2(x), \quad r_1\le x\le r, \tag{12}$$

где $\psi_1(x),\psi_2(x)$ – заданные функции, причем $\psi_1(r_1)=\psi_2(r_1)$.

Задача $\mathbf{\Gamma_2}$. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (10), удовлетворяющее краевым условиям (6), (11) и условию*

$$u_{|_{BC_2}}=\psi_2(x), \quad r_1\le x\le r, \tag{13}$$

где $\psi_2(x)$ – заданная функция.

Для задачи $\mathbf{\Gamma_1}$ доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi_k(y)\in C[0,h]$, $\psi_k(x)\in C^1(\bar{J}_k)\cap C^2(J_k)$, $f_0(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по x, $f_k(x,y)\in C(\bar{\Omega}_k)\cap C^1(\Omega_k)$, $k=1,2$; $c\neq\frac{4\pi^2n^2+\lambda^2r^2}{4r^2}$, $n=0,1,2,...$; $\mathbf{M}_l[C^1(J_l)]\subset C^1(\Omega_l)$, $l=0,1,2$. Тогда задача $\mathbf{\Gamma_1}$ является задачей фредгольмового типа. В частности, если выполняется неравенство*

$$\max_{k\in\{1,2\}}\left\{r_k\gamma_k\left(\|\mathbf{M}_0\|+\frac{r_k}{4}\|\mathbf{M}_k\|\right)\right\}<1, \tag{14}$$

где $\gamma_k=\frac{\operatorname{th}(\mu_k r_k/2)}{2\mu_k}$, $\mu_k=\frac{\sqrt{\lambda^2-4c}}{2}$, $\lambda=a+3-2k$, то задача $\mathbf{\Gamma_1}$ имеет, и притом единственное решение.

Для задачи $\mathbf{\Gamma_2}$ доказана следующая

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и $\varphi_2(0)=\psi_2(r)$. Тогда задача $\mathbf{\Gamma_2}$ является задачей фредгольмового типа. В частности, если выполняется неравенство (14), где $\gamma_k=\frac{\operatorname{th}(\mu r_k/2)}{2\mu}$, $\mu=\frac{\sqrt{\lambda^2-4c}}{2}$, $\lambda=a+1$, то задача $\mathbf{\Gamma_2}$ имеет, и притом единственное решение.*

Замечание. Если в постановке задачи $\mathbf{\Gamma_1}$ точка E совпадает с точкой A, то задача $\mathbf{\Gamma_1}$ переходит в задачу (5)-(7).

В § 2.2 в той же области Ω (см. рис. 2) изучается задача Геллерстедта с разрывными условиями склеивания для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+\lambda_0(x)u(x,0), & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda_k(x)u(x,0), & (x,y)\in\Omega_k,\ k=1,2,\end{cases} \tag{15}$$

где $\lambda_k(x)$ $(k=0,1,2)-$ заданные непрерывные функции.

Задача $\mathbf{\Gamma_3}$. *Найти регулярное в области Ω_k $(k=0,1,2)$ решение уравнения (15) $u(x,y)\in C(\bar\Omega_k)\cap C^1(\Omega_k\cup J_k)$, кроме того, $u_y(x,+0)\in L(J_0)$, $u_y(x,-0)\in L(J_n)$ $(n=1,2)$, удовлетворяющее условиям склеивания*

$$\begin{cases} u(x,-0)=\alpha_k(x)u(x,+0)+\gamma_k(x), \quad x\in \bar J_k,\\ u_y(x,-0)=\beta_k(x)u_y(x,+0)+\delta_k(x)u(x,+0)+\zeta_k(x), \quad x\in J_k,\end{cases} \quad k=1,2;$$

и краевым условиям (6), (11), (12), где φ_k, ψ_k, α_k, β_k, γ_k, δ_k, ζ_k - заданные непрерывные функции, причем $\alpha_k\beta_k\neq 0$, ${\psi_k}''$, ${\alpha_k}''$, ${\beta_k}''$, ${\gamma_k}''$ - также непрерывны.

Для задачи $\mathbf{\Gamma_3}$ доказана следующая

Теорема 2.3. *Если функция $\lambda_0(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, функции $\lambda_k(x)\in C[0,r]\cup C^1]0,r[$ $(k=1,2)$, и выполняются неравенства*

$$1-\frac{2{\beta_1}'}{\alpha_1}+x\left(\frac{{\alpha_1}''\beta_1}{\alpha_1^2}-\frac{2{\alpha_1'}^2}{\alpha_1^3}-\frac{\lambda_0\beta_1+\delta_1}{\alpha_1}-\left[\frac{2{\alpha_1'}^2\beta_1}{\alpha_1^2}\right]'-\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right]''\right)-T_1(0,x)\geq 0,$$

$$1+\frac{2{\beta_2}'}{\alpha_2}+(r-x)\left(\frac{{\alpha_2}''\beta_2}{\alpha_2^2}-\frac{2{\alpha_2}'^2}{\alpha_2^3}-\frac{\lambda_0\beta_2+\delta_2}{\alpha_2}+\left[\frac{2{\alpha_2}'^2\beta_2}{\alpha_2^2}\right]'+\left[\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right]''\right)-T_2(r,x)\geq 0,$$

где

$$T_1(0,x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\lambda_1(x), & 0\leq x\leq \frac{r_1}{2},\\ x(r_1-x)\lambda_1(x), & \frac{r_1}{2}\leq x\leq r_1,\end{cases}$$

$$T_2(r,x)=\begin{cases}(r-x)(x-r_1)\lambda_2(x), & r_1\leq x\leq \frac{r+r_1}{2},\\ \frac{(r-x)^2}{2}\lambda_2(x), & \frac{r+r_1}{2}\leq x\leq r,\end{cases}$$

то задача $\mathbf{\Gamma_3}$ имеет, и притом единственное решение.

В **третьей главе** рассматриваются нелокальные краевые задачи.

В § 3.1 рассмотрены задачи со смещением для уравнения (1) в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=h>0$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ при $y<0$ (см. рис. 1).

Задача $\mathbf{N_1}$. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условию*

$$\alpha u[\theta_0(x)]+\beta u[\theta_1(x)]=\gamma_1(x), \quad 0\leq x\leq 1,$$

где $\gamma_1(x)-$ заданная функция, $\alpha,\beta=const$, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Задача $\mathbf{N_2}$. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условию*

$$\alpha\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]+\beta\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]=\gamma_2(x), \qquad 0<x<1,$$

где $\gamma_2(x)$ – заданная функция, $\alpha,\beta=const$, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Для задачи $\mathbf{N_1}$ доказана следующая

Теорема 3.1. *Если* $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h],\ \ \gamma_1(x) \in C^1[0,1] \cap C^2]0,1[$, *функция* $\lambda_1(x,y) \in C(\bar{\Omega}^+)$ *и удовлетворяет условию Гельдера по* x, *а* $\lambda_2(x) \in C[0,1] \cap C^1]0,1[$, *и выполняются условия*

$$\alpha\beta \leq 0, \qquad \lambda_1(x,0) \leq 0, \qquad \lambda_2(x) \geq 0, \qquad j\lambda_2'(x) \geq 0, \tag{16}$$

причем $\alpha^2\varphi_1(0)-\beta^2\varphi_2(0) = \alpha\gamma_1(0)-\beta\gamma_1(1)$, *то задача* $\mathbf{N_1}$ *имеет, и притом единственное решение.*

Для задачи $\mathbf{N_2}$ доказана следующая

Теорема 3.2. *Если* $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h],\ \ \lambda_1(x,y) \in C(\bar{\Omega}^+)$ *и удовлетворяет по* x *условию Гельдера,* $\lambda_2(x),\ \gamma_2(x) \in C[0,1] \cap C^1]0,1[$, *и выполняются условия* (16), *то задача* $\mathbf{N_2}$ *имеет, и притом единственное решение.*

Параграф 3.2 посвящен изучению задачи со смещением для уравнения (5) в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=r$, $y=h>0$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=r$ при $y<0$.

Задача N. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (5), *удовлетворяющее краевым условиям* (6) *и*

$$\alpha u[\theta_0] + \beta u[\theta_1] = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r,$$

где $\psi(x)$ *– заданная функция, причем* $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

Для задачи **N** доказана следующая

Теорема 3.3. *Пусть* $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C[0,h],\ \ \psi(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $c \neq \frac{\pi^2 n^2}{r^2}+\lambda^2$, $n=0,1,2,...;$ $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\frac{a}{2}$, *выполняется* $\mathbf{M}_1[C^1(J)] \subset C^1(\Omega^+)$, $\mathbf{M}_2[C^1(J)] \subset C^1(\Omega^-)$, $\alpha^2\varphi_1(0)-\beta^2\varphi_2(0) = \alpha\psi(0)-\beta\psi(r)$. *Тогда задача* **N** *является задачей фредгольмового типа. В частности, если выполняется неравенство* $\|\mathbf{M}_1\| + \frac{r}{4}\cdot\frac{|\alpha|+2|\beta|}{|\alpha-\beta|}\|\mathbf{M}_2\| < \frac{1}{\gamma r}$, *где* $\gamma = \frac{\operatorname{th}(\mu r/2)}{2\mu}$, $\mu = \sqrt{\lambda^2-4c}$, *то задача* **N** *имеет, и притом единственное, решение.*

В § 3.3 рассматривается задача типа задачи Бицадзе-Самарского для нагруженного модельного уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1(x,y)u(x,0) - f_1(x,y), & y>0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2(x,y)u(x,0) - f_2(x,y), & y<0, \end{cases} \tag{17}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=r$, $y=h>0$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=r$ при $y<0$, $\lambda_k(x,y)$, $f_k(x,y)$ $(k=1,2)$– непрерывные в замыкании области их определения функции.

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (17) *с непрерывной вплоть до отрезка* BB_0 *производной первого порядка по переменной* x, *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad 0\le y\le h, \tag{18}$$

$$[\alpha_1(y)u_x+\beta_1(y)u]_{|x=x_0}=[\alpha_2(y)u_x+\beta_2(y)u]_{|x=r}+\gamma(y), \tag{19}$$

$$u\left[\theta_0(x)\right]=\psi(x), \quad 0\le x\le r, \tag{20}$$

где x_0 *- фиксированная точка интервала* J, $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$ $(k=1,2)$, $\varphi_1(y)$, $\gamma(y)$, $\psi(x)$ *– заданные функции, непрерывные в замыкании области их определения,* $\varphi_1(0)=\psi(0)$.

Для задачи (17)-(20) доказана следующая

Теорема 3.4. *Если* $\psi(x)\in C^1(\bar J)\cap C^2(J)$, $f_1(x,y),\lambda_1(x,y)$ *удовлетворяют условию Гельдера по* x, $f_2(x,y),\lambda_2(x,y)\in C(\bar\Omega^-)\cap C^1(\Omega^-)$, *причем*

$$\alpha_1(0)g_1'(x_0)+\beta_1(0)g_1(x_0)-\alpha_2(0)g_1'(r)-\beta_2(0)g_1(r)\ne 0,$$

где $g_1(x)$ *есть решение уравнения*

$$g_1(x)-\int\limits_0^x K(x,\xi)g_1(\xi)d\xi=x,$$

$$K(x,\xi)=\begin{cases}1-(x-\xi)\lambda_1(\xi,0)+\int\limits_{-\xi}^{0}(x-\xi+\eta)\lambda_2(\xi,\eta)d\eta, & 0\le\xi\le x/2,\\ 1-(x-\xi)\lambda_1(\xi,0)+\int\limits_{\xi-x}^{0}(x-\xi+\eta)\lambda_2(\xi,\eta)d\eta, & x/2\le\xi\le x,\end{cases}$$

$\beta_2(y)\ne 0$ $(0\le y\le h)$, *то задача* $(17)-(20)$ *имеет, и притом единственное решение.*

Приведены примеры выполнения условий теоремы.

В § 3.4 исследуется нелокальная краевая задача с интегральным условием в гиперболической части для уравнения (1) в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=h>0$ соответственно при $y>0$, и характеристиками волнового уравнения $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ при $y<0$ (см. рис. 1).

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям* (2) *и условию*

$$u[\theta(x)]+\int\limits_0^1 K(x,\xi)u(\xi,0)d\xi=\psi(x), \quad 0\le x\le 1, \tag{21}$$

где $\psi(x),K(x,\xi)$ *– заданные функции.*

Будем говорить, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию монотонности **M**, если для любых x и y из $]0,1[$

$$\rho(x) \in C^1]0,1], \quad \rho(x) \geq 0, \quad \int\limits_0^1 \rho(x)dx < \infty,$$

$$\rho(x) \geq \rho(y), \quad \rho'(x) < \rho'(y), \quad \forall\, x < y.$$

Доказана следующая

Теорема 3.5. *Если* $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0,h]$, $\psi(x) \in C^1[0,1] \cap C^2]0,1[$, $\lambda_1(x,y)-$ *непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера по переменной* x, $\lambda_2(x) \in C[0,1] \cap C^1]0,1[$, *выполняются условия*

$$\lambda_1(x,0) \leq 0, \qquad \lambda_2(x) \geq 0,$$

при $j=1$ *еще и* $\lambda_2'(x) \geq 0$, *функция* $K(x,\xi)$ *представима в виде*

$$K(x,\xi) = \delta(\xi) + \operatorname{sign}(x-\xi)\rho(|x-\xi|),$$

где $\rho'(x)$ *удовлетворяет условию* **M**, $\delta(x), \rho''(x) \in L[0,1]$, *то задача* $(1),(2),(21)$ *имеет, и притом единственное решение.*

В **заключении** сформулированы основные научные результаты диссертационной работы.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю Адаму Маремовичу Нахушеву за постоянное внимание и поддержку в работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Хубиев, К.У.* Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Международного Российско-Казахского симпозиума. Нальчик-Эльбрус, 22–26 мая, 2004 г. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2004. – С. 182–185.

[2] *Хубиев, К.У.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. – Т.3. – Самара: СамГТУ, 2004. – С. 231–232.

[3] *Хубиев, К.У.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// Актуальные проблемы

современной науки: Труды 5-й Международной конференции молодых ученых и студентов. Естественные науки. – Т. 1,2. – Самара: СамГТУ, 2004. – С. 112–115.

[4] *Хубиев, К.У.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* – 2005. – Т. 7, № 2. – С. 74–77.

[5] *Хубиев, К.У.* Краевая задача со смещением для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы III Школы молодых ученых. Нальчик-Эльбрус, 25–29 мая 2005 г. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2005. – С. 68–72.

[6] *Хубиев, К.У.* Краевая задача со смещением для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// Материалы IV молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения", посвященной 100-летию Б.Л. Лаптева. Казань, 16–18 декабря 2005 г. – Казань: КГУ, 2005. – С. 168–170.

[7] *Хубиев, К.У.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа с переменными коэффициентами/ К.У. Хубиев// *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* – 2006. – Т. 8, № 2. – С. 69–72.

[8] *Хубиев, К.У.* Задача Геллерстедта для нагруженного модельного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III Международной конференции. Нальчик, 5–8 декабря 2006 г. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2006. – С. 313–314.

[9] *Хубиев, К.У.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами/ К.У. Хубиев// *Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки.* – 2007. – Т. 2(15). – С. 155–157.

[10] *Хубиев, К.У.* Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// *Вестник Адыгейского госуд. ун-та.* – 2007. – Т. 4(28). – С. 25–29.

[11] *Хубиев, К.У.* Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа с данными на непараллельных характеристиках/ К.У. Хубиев// Математическое моделирование и краевые задачи: Труды IV Всероссийской научной конференции. – Т. 3. – Самара: СамГТУ, 2007. – С. 187–188.

[12] *Хубиев, К.У.* Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с данными на непараллельных характеристиках/ К.У. Хубиев// Материалы Воронежской весенней математической шко-

лы "Понтрягинские чтения - XVIII". Воронеж, 3–9 мая 2007 г. – С. 171–172.

[13] *Хубиев, К.У.* Об одной задаче для нагруженного уравнения смешанного типа с переменными коэффициентами/ К.У. Хубиев// Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы V Школы молодых ученых. Нальчик–Эльбрус, 26–30 сентября 2007 г. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2007. – С. 138–140.

[14] *Хубиев, К.У.* Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* – 2007. – Т. 9, № 2. – С. 71–74.

[15] *Хубиев, К.У.* О нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIX". Воронеж, 3–9 мая 2008 г. – С. 227–228.

[16] *Хубиев, К.У.* О нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// Уравнения смешанного типа и проблемы современного анализа и информатики: Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума. Нальчик–Эльбрус, 12–17 мая 2008 г. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2008. – С. 241–242.

[17] *Хубиев, К.У.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды Международной конференции. Стерлитамак, 24–28 июня 2008 г. – Т. 2. – Уфа: Гилем, 2008. – С. 180–184.

[18] *Хубиев, К.У.* Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// В сб.: Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. – Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. – С. 331–335.

[19] *Хубиев, К.У.* Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* – 2008. № 6. – С. 23–25.

[20] *Хубиев, К.У.* Аналог задачи Трикоми и задача со смещением для модельного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа/ К.У. Хубиев// *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 68–72.

[21] *Хубиев, К.У.* Об одной задаче со смещением для нагруженного уравнения смешанного типа/ К.У. Хубиев// Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы III Международной научной конференции. Воронеж, 2–7 февраля 2009 г. – Ч. I. – С. 187–188.

Локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений
смешанного гиперболо-параболического типа

———————————————————

Формат 30 × 42. 1/4. Усл. печ.л. 1.0
Бумага офсетная. Заказ №101. Тираж 100 экз.
ЧП "Полиграфия". Лицензия №15 от 22.01.03г.
КБР, г.Нальчик, ул. Чернышевского, 131.